

1. Znaleźć najmniejsze i największe wartości funkcji na podanych zbiorach.

(a)  $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ ,  $x^2 + y^2 \leq 36$ .

(b)  $f(x, y) = x^2y - 8x - 4y$ , trójkąt o wierzchołkach  $(0,0)$ ,  $(0,4)$ ,  $(4,0)$ .

(c)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $|x| + |y| \leq 2$ .

(c)  $f(x, y) = xy^2 + 4xy - 4x$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ ,  $-3 \leq y \leq 0$ .

(d)  $f(x, y) = \frac{(x^2-1)(y^2-1)}{x^2+y^2+2}$ ,  $\mathbb{R}^2$ .

(e)  $f(x, y) = x^4 + y^4$ ,  $x^2 + y^2 \leq 9$ .

2.(a) Na płaszczyźnie  $x + 2y - 3z = 6$  znaleźć punkt położony najbliżej początku układu współrzędnych.

(b) Znaleźć wymiary prostopadłościanu wpisanego w kulę o promieniu  $R$ , który ma największą objętość.

(c) Znaleźć odległość między protymi skośnymi  $k : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ ,  $l :$

$$\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$

(d) Prostopadłościenny magazyn ma mieć objętość  $V = 216m^3$ . Do budowy ścian magazynu używane są płyty w cenie 30 zł  $m^2$ . Do budowy podłogi w cenie 40 zł  $m^2$ , a sufitu w cenie 20 zł  $m^2$ . Znaleźć wymiary magazynu, którego koszt budowy będzie najmniejszy.

(e) Wśród trójkątów wpisanych w koło o promieniu  $R$  znaleźć ten o największym polu.

3. Zbadać czy podane równania określają jednoznacznie ciągłe funkcje uwikłane  $y = y(x)$  na pewnych otoczeniach zadanych punktów.

(a)  $x^y - y^x = 0$ ,  $A = (2, 4)$ ,  $B = (3, 3)$ ,  $C = (e, e)$ .

(b)  $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 0$ ,  $A = (0, 0)$ ,  $B = (-1, 1)$ ,  $C = (1, 1)$ .

(c)  $x - \sin y = 0$ ,  $A = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$ ,  $B = (1, \frac{\pi}{4})$ ,  $C = (0, 2\pi)$ .

4. Napisać równania stycznych do krzywych określonych podanymi równaniami we wskazanych punktach.

(a)  $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ .

(b)  $xe^y + ye^x = e^{xy}$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ .

(c)  $x^3 - x - y^3 - y = 0$ ,  $(2, 2)$ .

(d)  $x^2 + y^2 - 3xy + x = 0$ ,  $(1, 1)$ .

5. Obliczyć pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanych  $y = y(x)$  określonych podanymi równaniami.

(a)  $y - \arctg y - x^3 = 0$ .

(b)  $xe^y + ye^x - 2 = 0$ , w punkcie  $x_0 = 0$ .

(c)  $xe^y - y + 1 = 0$ .

(d)  $x^2 + y^2 - 3xy = 0$ .

(e)  $x - y = \sin x - \sin y$ .

6. Wyznaczyć extrema lokalne funkcji uwikłanych postaci  $y = y(x)$  określonych podanymi równaniami.

(a)  $x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0$ .

(b)  $(x - y)^2 = y + xy - 3x$ .

(c)  $x^2 + xy + y^2 + x - y - 2 = 0$ .

(d)  $4x^3 + y^3 - 3xy = 0$ .